2) **Baz Boyut Tespiti:** Elemanter işlemler yardımıyla baz ve boyut tespiti yapılabilir. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in F^m$ vektörlerinden olsun $Sp\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ uzayının bazını ve boyutunu bulmak için bu vektörleri satır kabul eden A matrisi bulunur. A nın R eşelon matris elde edilir.

R nin sıfırdan farklı satırları $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ ise boy $Sp\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} = \text{boy } R$ olup $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$ kümesi $Sp\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ uzayı için bazdır.

Örnek: $\alpha_1 = (1,2,3,4)$, $\alpha_2 = (-1,0,1,2)$, $\alpha_3 = (1,1,0,1)$, $\alpha_4 = (2,1,0,1)$ olmak üzere $V = Sp\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ uzayının boyutunu ve bir bazını bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ yazılır.}$$

$$A \overset{\varepsilon_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -7 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_4}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_5}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_6}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

boy $V = 4$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ V için bazdır.

3) Lineer Bağımsızlık Testi: $A \approx I$ ise A nın satırları lineer bağımsızdır.

Örnek: $S = \{\alpha_1 = (1,-1,0), \alpha_2 = (0,3,2), \alpha_3 = (-1,3,4)\}$ cümlesi lineer bağımsız mıdır?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_4}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_5}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

• Teorem: $A \in \mathcal{F}^m_n$, $B \in \mathcal{F}^n_p$ olsun. ε elemanter satır işlemi için

$$\varepsilon(AB) = \varepsilon(A)B \text{ dir.}$$

Özel olarak $A = I_n$ alınırsa $\varepsilon(B) = \varepsilon(I_n)B$ dir.

Tanım: Birim matrise birtek elemanter işlem uygulanarak elde edilen matrise elemanter matris denir, E ile gösterilir.

Örnek: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \varepsilon: \alpha_1 \to 5\alpha_1$

$\varepsilon(I_3) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ elemanter matris.

$\varepsilon: \alpha_2 \to \alpha_2 - \frac{1}{7}\alpha_3$ $\quad \varepsilon(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$

Sonuç: Her elementer matris regülerdir. Yani tersi vardır. Tersi de aynı tipten elementer matristir.

İspat: $\mathcal{E}(I_n)$ elementer matrisi için $(\mathcal{E}(I_n))^{-1}$ var-mıdır?

Önceki teoremden $B \in \mathcal{F}^m_n$ için $\mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(I_n)B$ idi. (*)

Burada B yerine $\mathcal{E}(I_n)$ ve $\mathcal{E}$ yerine de $\mathcal{E}^{-1}$ alınırsa

$$\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(I_n)) = \mathcal{E}^{-1}(I_n)\,\mathcal{E}(I_n)$$

$$I_n = \mathcal{E}^{-1}(I_n)\,\mathcal{E}(I_n) \quad \text{--} (1).$$

Yine (*) da B yerine $\mathcal{E}^{-1}(I_n)$ alınırsa.

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(I_n)) = \mathcal{E}(I_n)\,\mathcal{E}^{-1}(I_n)$$

$$I_n = \mathcal{E}(I_n)\,\mathcal{E}^{-1}(I_n) \quad \text{--} (2).$$

(1) ve (2) den ters matris tanımından $(\mathcal{E}(I_n))^{-1} = \mathcal{E}^{-1}(I_n)$ dir. O halde elementer matrisin tersi vardır. Tersini bulmak için kendisini bulurken kullandığımız $\mathcal{E}$ işleminin tersini I_n e uygularız.

Örnek: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathcal{E}: \alpha_1 \longrightarrow -\frac{1}{2}\alpha_1$

$$\mathcal{E}(I_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \qquad E^{-1} = ?$$

$$\mathcal{E}^{-1}: \alpha_1 \longrightarrow (-2)\alpha_1$$

$$\mathcal{E}^{-1}(I_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}$$

Örnek: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \mathcal{E}: \alpha_2 \to \alpha_2 + (-\frac{1}{2})\alpha_1$

$\qquad \mathcal{E}^{-1}: \alpha_2 \to \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1$

$\mathcal{E}(I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = E, \qquad \mathcal{E}^{-1}(I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}$

Teorem (Çarpanlara Ayırma Teoremi): Bir $A \in \mathbb{F}^m_n$ matrisinin satırca indirgenmiş eşelon matrisi R olsun.

$$R = E_s \dots E_2 E_1 A$$ olacak şekilde $E_1, E_2, \dots, E_s$ elemanter matrisleri vardır. Ayrıca

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1} R$$ dir.

İspat: A dan R yi elde etmek için uygulanan elemanter işlemler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ olsun.

$$\varepsilon_s(\varepsilon_{s-1} \dots \varepsilon_2(\varepsilon_1(A))\dots) = R$$

$$\varepsilon_1(A) = \varepsilon_1(I_m) A \qquad , \quad (\varepsilon(AB) = \varepsilon(A)B)$$

$$\varepsilon_2(\varepsilon_1(A)) = \varepsilon_2(\varepsilon_1(I_m)) A$$

$$= \varepsilon_2(I_n)\, \varepsilon_1(I_m) A$$

$$\varepsilon_s(\dots \varepsilon_2(\varepsilon_1(A))\dots) = R$$ den

$$\varepsilon_s(I_m) \dots \varepsilon_2(I_m)\, \varepsilon_1(I_m) A = R$$

$$E_s \dots E_2 E_1 A = R$$ yazılır.

$$\Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1} R$$ elde edilir.

Örnek: $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisini çarpanlarına ayırınız.

Önce R yi bulalım.

$\mathcal{E}_1 : \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + (-1)\alpha_1$, $\mathcal{E}_2 : \alpha_2 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_2$

$$\mathcal{E}_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_1(A)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}_3 : \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + (-1)\alpha_2$

$$\mathcal{E}_3(\mathcal{E}_2(\mathcal{E}_1(A))) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$$\mathcal{E}_3(I_3)\,\mathcal{E}_2(I_3)\,\mathcal{E}_1(I_3)\,A = R$$

$$A = \mathcal{E}_1^{-1}(I_3)\,\mathcal{E}_2^{-1}(I_3)\,\mathcal{E}_3^{-1}(I_3).R$$

$\mathcal{E}_1^{-1} : \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + \alpha_1$

$\mathcal{E}_2^{-1} : \alpha_2 \rightarrow -2\alpha_2$

$\mathcal{E}_3^{-1} : \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2$

$$\mathcal{E}_1^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_2^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}_3^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisini çarpanlarına ayırınız.